Emparelhamentos

18 de Novembro de 2016

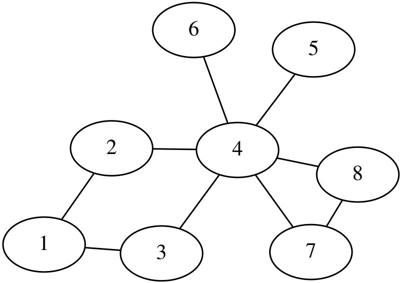
Conteúdo

Definição de emparelhamento

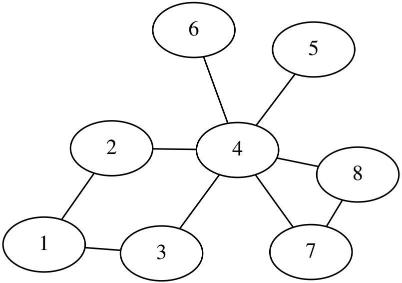
Definition

Dado um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto M de E é chamado de emparelhamento em G se não há duas arestas que são adjacentes em G.

Exemplo de emparelhamento



Exemplo de emparelhamento

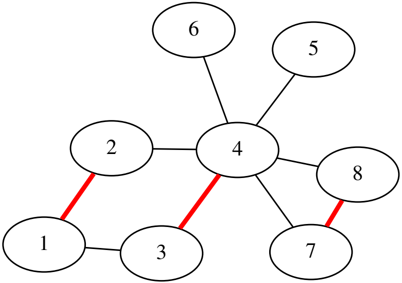


Um emparelhamento satura vértices

Definition

Um emparelhamento M satura um vértice v, e v é *M-saturado* se alguma aresta de M é incidente em v; caso contrário, v é *M-insaturado*.

Exemplo de saturação de vértice



$$M = \{(1,2),(3,4),(7,8)\}$$

- $(1,2)$ satura vértices 1 e 2
- $(3,4)$ satura vértices 3 e 4
- $(7,8)$ satura vértices 7 e 8

Se todo vértice é M-saturado, o emparelhamento é perfeito

M é um emparelhamento máximo se G não tem emparelhamento M' com $|M'| > |M|$.
Todo emparelhamento perfeito é máximo.

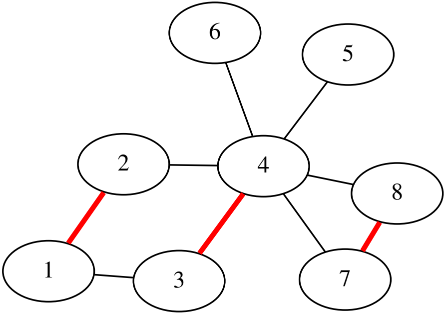
Se todo vértice é M-saturado, o emparelhamento é perfeito

M é um emparelhamento máximo se G não tem emparelhamento M' com $|M'| > |M|$.
Todo emparelhamento perfeito é máximo.
Todo emparelhamento máximo é perfeito?

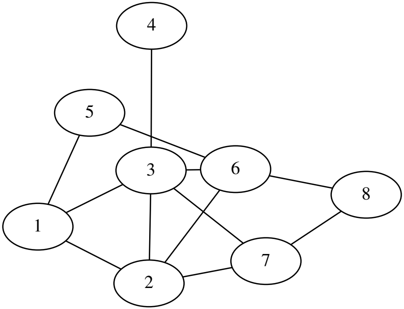
Se todo vértice é M-saturado, o emparelhamento é perfeito

M é um emparelhamento máximo se G não tem emparelhamento M' com $|M'| > |M|$.
Todo emparelhamento perfeito é máximo.
Todo emparelhamento máximo é perfeito? Não.

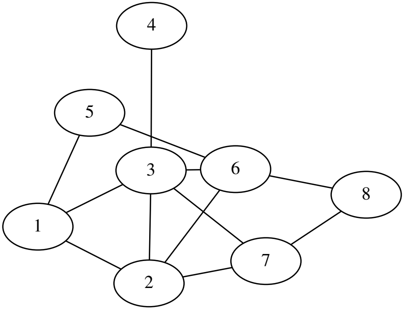
Exemplo de emparelhamento máximo

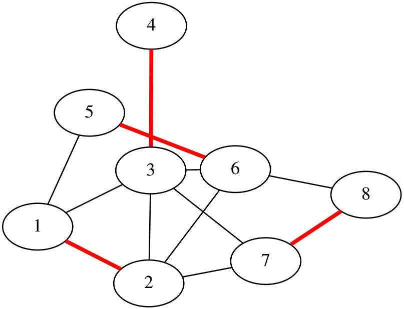


Exemplo de emparelhamento perfeito



Exemplo de emparelhamento perfeito



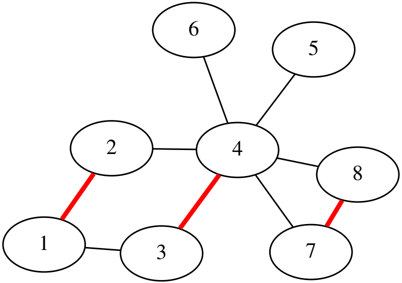


Definição de caminho alternante

Definition

Um caminho M-alternante é um caminho em G em que as arestas alternam em $E \setminus M$ e M.

Exemplo de caminho alternante



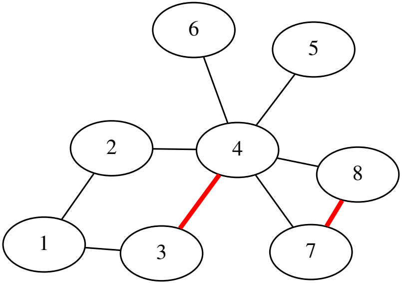
Caminho alternante: $(5, 4, 3, 1, 2)$

Definição de caminho aumentante

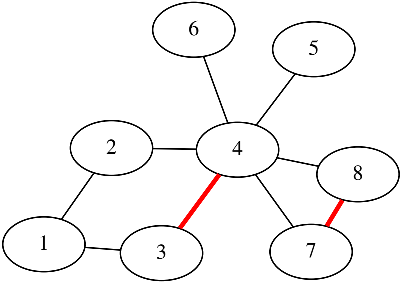
Definition

Um caminho M-aumentante é um caminho M-alternante no qual o vértice de origem e o vértice final são M-insaturados.

Exemplo de caminho aumentante

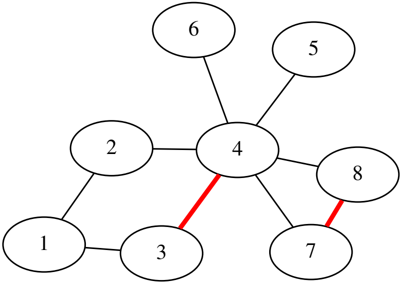


Exemplo de caminho aumentante



- Caminho aumentante: $(6, 4, 3, 1)$

Exemplo de caminho aumentante



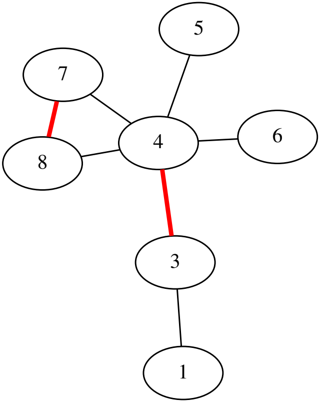
- Caminho aumentante: $(6, 4, 3, 1)$
- Caminho aumentante: $(1, 3, 4, 2)$

Definição do Teorema de Berge

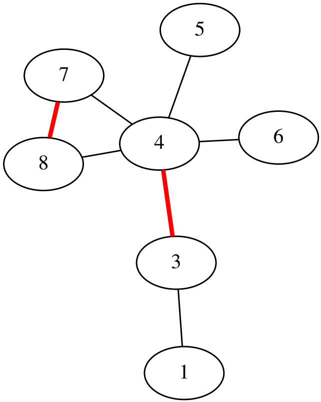
Theorem

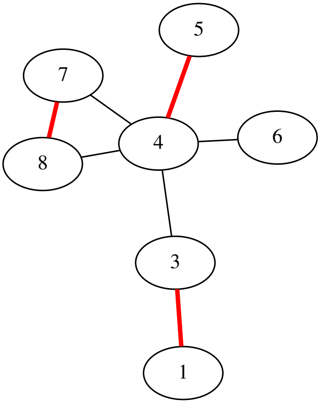
Um emparelhamento M em G é um emparelhamento máximo se e somente se G não contém caminhos M-aumentantes.

Exemplo



Exemplo





Definição do Teorema de Hall

Theorem

Seja G um grafo bipartido com a bipartição (X, Y). Então G contém um emparelhamento que satura todos os vértices em X se e somente se

$$|N(S)| \geq |S| \text{ para todo } S \subseteq X$$

Prova da ida

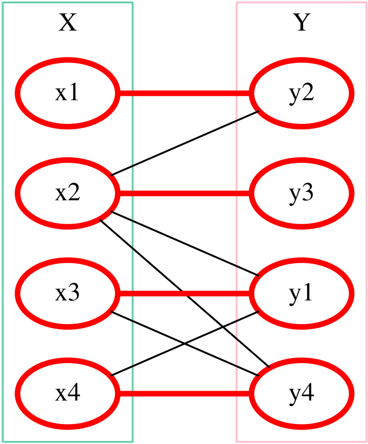
Definition

G tem um emparelhamento que satura todos os vértices de $X \implies |N(S)| \geq |S| \; \forall \; S \subseteq X$.

G contém um emparelhamento M.

Como todos os vértices de S estão emparelhados sob M com vértices distintos de $N(S)$, nós temos $|N(S)| \geq |S|$. $\square$

Exemplo



S	N(S)
$\{x1\}$	$\{y2\}$
$\{x2\}$	$\{y1, y2, y3, y4\}$
$\{x3\}$	$\{y1, y4\}$
$\{x4\}$	$\{y1, y4\}$
$\{x1, x2\}$	$\{y1, y2, y3, y4\}$
$\{x1, x3\}$	$\{y1, y2, y4\}$
...	...

Prova da volta

Definition

$|N(S)| \geq |S| \ \forall \ S \subseteq X \implies G$ tem um emparelhamento que satura todos os vértices de X.

Prova por contradição.

Suponha, por contradição, que G é um grafo bipartido em que $|N(S)| \geq |S|$ *para todo* $S \subseteq X$ mas que G não contém um emparelhamento que sature todos os vértices em X.
Seja M^* um emparelhamento máximo em G. Pela nossa suposição, M^* não satura todos os vértices de X. □

Continuação da prova da volta

Continuação da prova por contradição.

Seja u um vértice M^*-insaturado em X, e seja Z o conjunto de todos os vértices conectados a u por caminhos M^*-alternantes. Já que M^* é um emparelhamento máximo, segue do teorema de Berge que u é o único vértice M^*-insaturado em Z. □

Continuação da prova da volta

Continuação da prova por contradição.

Seja $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Ou seja, S é o conjunto de vértices conectados a u por caminhos M^*-alternantes que estão em X e T é o conjunto de vértices conectados a u por caminhos M^*-alternantes que estão em Y. Sob M^*, os vértices em $S \setminus \{u\}$ estão emparelhados com os vértices em T. $\square$

Continuação da prova da volta

Continuação da prova por contradição.

Como u está em S (pois u está em X):

$$|T| = |S| - 1$$

e

$$N(S) = T$$

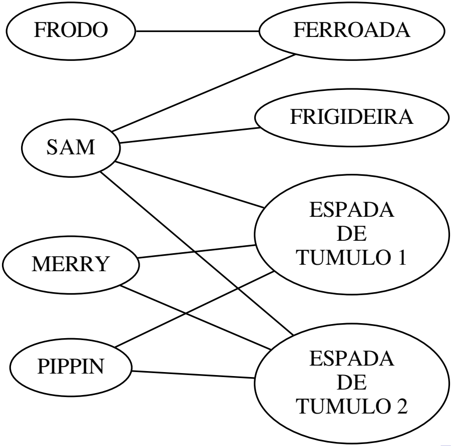
já que todo vértice em $N(S)$ está conectado a u por um caminho M^*-alternante. □

Continuação da prova da volta

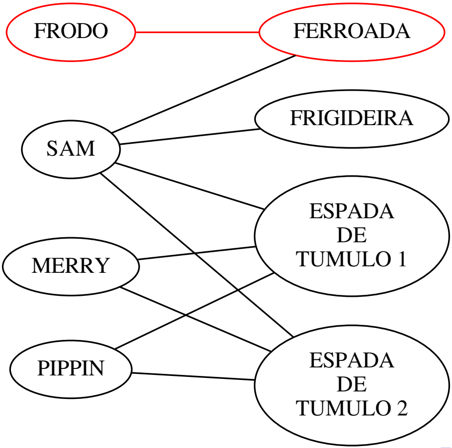
Fim da prova por contradição.

Mas se $N(S) = T$, então $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$. No entanto, nossa hipótese inicial é que $|N(S)| \geq |S|$, chegando então a uma contradição. $\square$

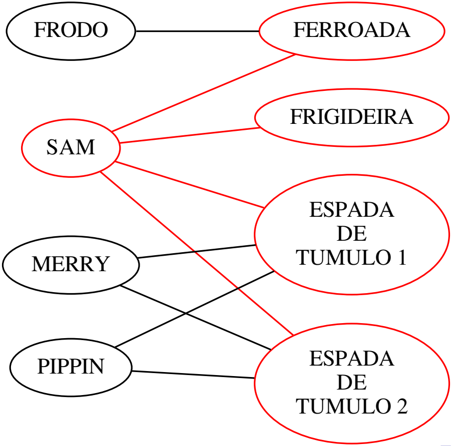
Sociedade do Anel (Hobbits)



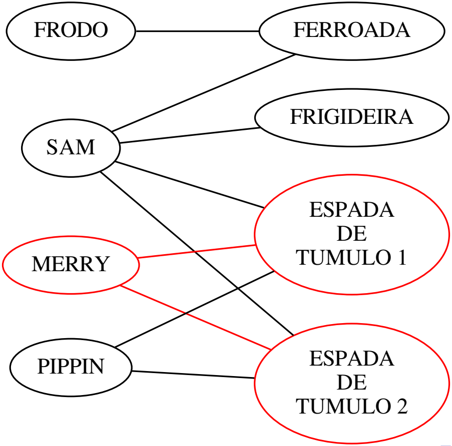
Sociedade do Anel (Hobbits)



Sociedade do Anel (Hobbits)



Sociedade do Anel (Hobbits)



Sociedade do Anel (Hobbits)